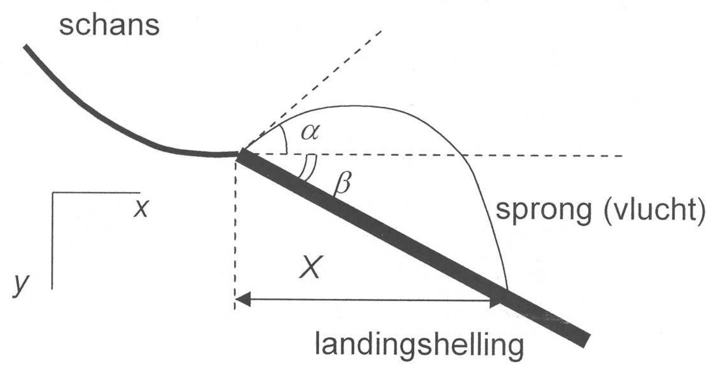
Tentamen Mechanica, 8 februari 2008, 9.00-12.00 uur
Maak elke opgave op een apart vel
Schrijf je naam en studentnummer op elk vel
Cijfer = Σ(punten)/2.8

Opgave 1: Schansspringer
Een skispringer spingt met snelheid v_0 van een schans. Op het moment van afspringen maakt zijn snelheid een hoek α met het horizontale vlak; de helling waar hij uiteindelijk op terecht komt maakt een hoek β met het horizontale vlak (zie figuur). Kies de richtingen van de x en de y as als in de figuur aangegeven en kies de oorsprong op het punt van de afsprong. De zwaartekracht werkt vertikaal naar beneden.

Verwaarloos in eerste instantie wrijvingskrachten.



2p a) Geef de vergelijkingen die de beweging van de atleet gedurende zijn vlucht beschrijven (zijn afmetingen mogen verwaarloosd worden). Los de bewegingsvergelijkingen op, zodat je de beide coördinaten als functie van t krijgt.

2p b) Bereken de maximale hoogte die de springer boven zijn afspringhoogte komt.

2p c) Vind het tijdstip t van landing op de helling onder de schans en bepaal daarmee de totale horizontale verplaatsing X van de springer gedurende de sprong.

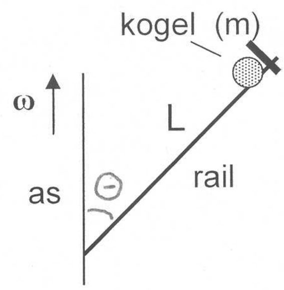
Neem nu aan dat er ook een wrijvingskracht $\mathbf{F}_w$ op de atleet werkt, waarvan de grootte evenredig is met de snelheid van de massa en tegengesteld gericht: $\mathbf{F}_w = -c\,\mathbf{v}$, met c een evenredigheidsconstante.

3p d) Geef de bewegingsvergelijkingen voor de snelheden in de x en de y richting gedurende de vlucht van de atleet en los deze op.

1p e) Als de atleet lang in de lucht is, wordt de vertikale snelheid bepaald door een eenvoudig evenwicht van krachten. Welk evenwicht is dat, en klopt dit antwoord met het antwoord dat je onder d) gekregen hebt?

Opgave 2: Roterende rail met kogel

Een rail waarover een kogel met massa m kan rollen is draaibaar rond een as die vertikaal in het zwaartekrachtsveld is opgesteld (zie figuur). We hebben deze situatie twee keer tijdens collegedemonstraties gezien. De lengte van de rail is L. De rail is bovenaan afgedicht, zodat de kogel er niet uit kan schieten. Neem in eerste instantie aan dat de hoeksnelheid van de rail constant is; de vector ω is naar boven gericht. De kogel mag als een puntmassa mogen beschouwd.



1p a) Komt in de figuur de rail het papier uit of gaat hij erin?

2p b) Neem aan dat het evenwicht van krachten zodanig is dat de kogel in rust ligt bovenin de rail. Geef in de figuur aan welke krachten nu werken op de kogel in het meeroterende stelsel; geef duidelijk hun richting aan.

1p c) Geef de grootte van de centrifugaalkracht. Laat duidelijk zien hoe je aan je antwoord komt.

1p d) Wat is de kritische waarde van de hoeksnelheid ω waarvoor de kogel nog bovenin blijft hangen?

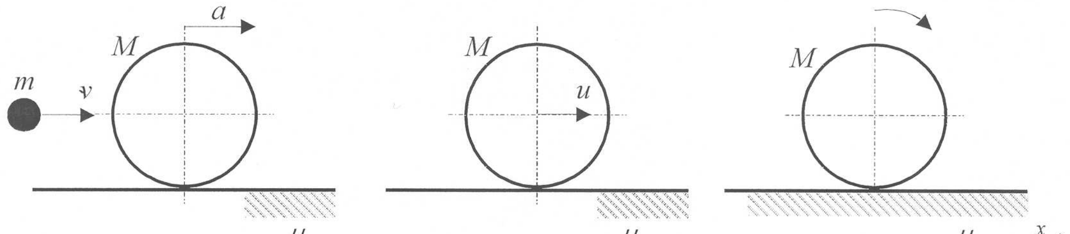
Als gevolg van wrijving in de lagers van de rotatieas, zal de hoeksnelheid afnemen, waardoor op een bepaald moment zijn grootte onder de kritische waarde komt en de kogel naar beneden begint te rollen.

1p e) Geef de richting van de Corioliskracht tijdens het rollen en druk de grootte ervan uit in de grootte van de rolsnelheid en de hoeksnelheid.

2p f) Bij het naar beneden rollen verandert de hoeksnelheid. Waarom? Wordt hij groter of kleiner? Geef de richting van $d\omega/dt$ en geef de richting en grootte van de derde schijnkracht die hiervan het gevolg is.

Opgave 3: Bal en kogel

Een massieve bal met een massa M en een straal a ligt aanvankelijk stil op een vrijwingsloos oppervlak. Dan wordt er een kogel met een massa m en snelheid v op een hoogte a tegen de bal aangeschoten, zie figuur (1). De botsing is elastisch en vindt plaats langs een rechte lijn. Direct na de botsing heeft de bal een horizontale snelheid u, zie figuur (2).



(1) (2) (3)

2p a) Schrijf voor de botsing het impulsbehoud en energiebehoud op.

1p b) Voor het geval dat de massa van de bal vijf keer zo groot is als de massa van de kogel, zal de kogel terugkaatsen met een snelheid met grootte $2v/3$. Bepaal u.

De bal glijdt aanvankelijk wrijvingsloos met constante snelheid u, maar na een bepaalde afstand is het oppervlak ruw met een kinetische wrijvingscoefficient μ, zie figuur (2). Op het ruwe oppervlak zal de bal eerst nog alleen glijden (pure slip), maar door de wrijving met het oppervlak zal deze rechtlijnige beweging geleidelijk overgaan in een slipvrije rolbeweging, zie figuur (3). De gyratiestraal van een massieve bal is $a\sqrt{2/5}$. De gravitatieversnelling g werkt vertikaal.

1.5p c) Geef in een schets aan welke krachten er op de bal werken als deze zich op het ruwe oppervlak bevindt en waar ze aangrijpen.

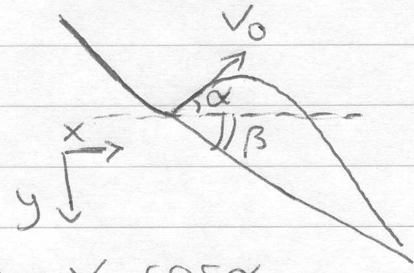
2p d) Geef de bewegingsvergelijking voor de versnelling van het massamiddelpunt en de hoekversnelling.

2p e) Vind uit de bewegingsvergelijkingen de snelheid van het massamiddelpunt en de hoeksnelheid als functie van de tijd t die verstreken is na het passeren van de overgang van glad naar ruw.

1.5p f) Bepaal het tijdstip t waarop de bal geheel slipvrij rolt.

Tentamen Mechanica 8 febr 2008

Opgave 1.



½ 1a) $m\ddot{x} = 0$ (geen krachten)

½ $m\ddot{y} = mg$ (zwaartekracht)

Los op: $\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = cst = \dot{x}(t=0) = v_0 \cos\alpha$

½ $\Rightarrow \underline{x = (v_0 \cos\alpha) t}$ $\quad (x(t=0) = 0)$.

$$\ddot{y} = g \Rightarrow \dot{y} = gt + v(t=0)$$
$$= gt - v_0 \sin\alpha$$

½ $\Rightarrow \underline{y = -(v_0 \sin\alpha)t + \frac{1}{2}gt^2}$

$(y(t=0) = 0)$.

1 1b) Maximale hoogte: $\dot{y} = 0 \Rightarrow t = (v_0 \sin\alpha)/g$.

$$\Rightarrow y = -\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} + \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}$$

1 $\Rightarrow$ max. hoogte: $\underline{\frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}}$.

(ook te krijgen via energiebehoud).

1c) Landing op de helling:
curve (parabool) die atleet aflegt snijdt

½ de lijn $y = x \tan\beta$ of: $\frac{y}{x} = \tan\beta$.

Ook uit onderdeel a: $\frac{y}{x} = -\tan\alpha + \frac{1}{2}\frac{gt}{v_0 \cos\alpha}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{gt}{v_0 \cos\alpha} = \tan\alpha + \tan\beta.$$

1 $\quad t = \frac{2 v_0 \cos\alpha}{g}[\tan\alpha + \tan\beta]$

½ $\Rightarrow x = \frac{2 v_0^2 \cos^2\alpha}{g}[\tan\alpha + \tan\beta]$.

subst. in $x(t)$

Tentamen Mechanica 8 febr. 2008

Opgave 1, vervolg.

(½) 1d) $m\ddot{x} = -c\dot{x}$ $\quad(\dot{x} = v_x)$

(½) $m\ddot{y} = -c\dot{y} + gm$ $\quad(\dot{y} = v_y)$

Los op: $\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{c}{m}\dot{x}$

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\gamma dt \qquad (\gamma \equiv c/m).$$

integreer:

$$\Rightarrow \ln \dot{x}(t) - \ln \dot{x}(t=0) = -\gamma t$$

(1) $\Rightarrow \underline{\dot{x}(t) = \dot{x}(t=0)e^{-\gamma t} = v_0 \cos\alpha\, e^{-\gamma t}}$

Los op voor $\dot{y}$:

$$\frac{d\dot{y}}{g - \gamma\dot{y}} = dt$$

integreer:

$$\Rightarrow -\frac{1}{\gamma}\left[\ln(g - \gamma\dot{y}(t)) - \ln(g - \gamma\dot{y}(t=0))\right] = t$$

$$\Rightarrow \frac{g - \gamma\dot{y}(t)}{g - \gamma\dot{y}(t=0)} = e^{-\gamma t}$$

$$\Rightarrow g - \gamma\dot{y}(t) = (g + \gamma v_0 \sin\alpha)e^{-\gamma t}$$

(1) $\Rightarrow \underline{\dot{y}(t) = \frac{1}{\gamma}\left[g - (g + \gamma v_0 \sin\alpha)e^{-\gamma t}\right]}$

1e) Met toenemende t: F_w neemt toe, zwaartekracht blijft gelijk $\Rightarrow$ evenwicht wordt bereikt

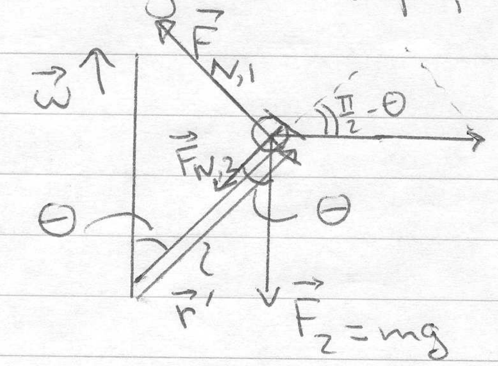
(½) als $F_{w,y} = F_z \Rightarrow c\dot{y} = mg \Rightarrow \dot{y} = g/\gamma$.

(½) klopt met antwoord onder 1d) in limiet $t \to \infty$.

Opgave 2.

(1) 2a) Rail gaat het papier in.

2b)



4 krachten:
- ($\frac{1}{2}$) zwaartekracht, vertikaal naar beneden
- ($\frac{1}{2}$) centrifugaalkracht, $\perp$ as naar buiten.
- ($\frac{1}{2}$) normaalkracht $\perp$ rail.
- ($\frac{1}{2}$) normaalkracht $\perp$ stopper (langs rail naar onder)

2c). $\vec{F}_{cf} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$.

$\vec{\omega}\times\vec{r}'$ is vecter $\perp$ papier, papier in,

! grootte: $|\vec{\omega}\times\vec{r}'| = \omega \underset{L}{\overset{\shortparallel}{r'}} \sin\Theta$ (Θ = hoek tussen as en rail)

(1) $\Rightarrow |\vec{F}_{cf}| = m\omega^2 L \sin\Theta$ (want hoek tussen $\vec{\omega}\times\vec{r}'$ en $\vec{\omega}$ is $90°$).

2d) Kogel blijft nog net hangen als

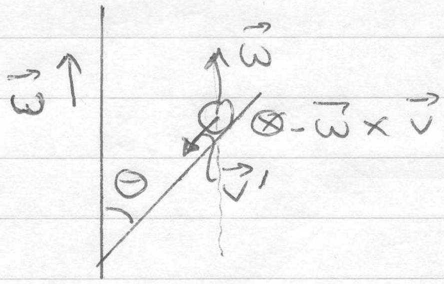
($\frac{1}{2}$) $F_{cf}\cdot\sin\Theta = F_z\cos\Theta$ ($F_{N,2} = 0$ dan)

$\Rightarrow m\omega^2 L\sin^2\Theta = mg\cos\Theta$

($\frac{1}{2}$) $\Rightarrow \omega^2 = \dfrac{g\cos\Theta}{L\sin^2\Theta} \Rightarrow \omega_{cr} = \sqrt{\dfrac{g\cos\Theta}{L\sin^2\Theta}}$

Opgave 2, vervolg.

2e)



$\frac{1}{2}$ $\vec{F}_{cor} = -2m\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,' \Rightarrow$ papier in.

$\frac{1}{2}$ $|\vec{F}_{cor}| = 2m\omega v' \sin\theta$

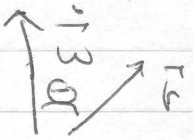
2 f) Naar beneden rollen $\Rightarrow$
traagheidsmoment wordt kleiner
$\Rightarrow |\vec{\omega}|$ wordt groter ($\vec{L} = I\vec{\omega}$ behouden ~~tijdens~~ rollen als wrijving klein is)

1/2

1/2 $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ naar boven gericht.

Transversale kracht:

1/2 $\vec{F}_{transv} = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,'$



richting: papier uit (loodrecht)
grootte: $m|\dot{\vec{\omega}}|r'\sin\theta$.

1/2

(Dit is niet verder uit te rekenen zonder verdere gegevens over de rolbeweging).

Tentamen Mechanica 8 febr. 2008 (5)

(1) 3a) Impulsbehoud: $mv = mv' + Mu$

(1) Energiebehoud: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}Mu^2$

(v' = snelheid kogel na botsing)

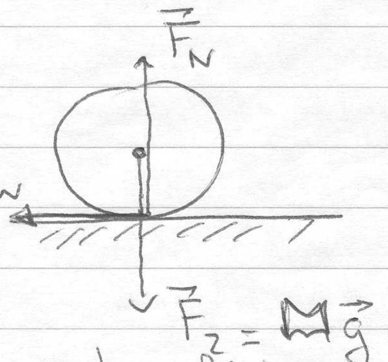
3b) Gegeven: $v' = -\frac{2}{3}v$ (let op teken!)

Subst. in impulsbehoud

(1) $\Rightarrow \quad v = -\frac{2}{3}v + \frac{M}{m}u \Rightarrow u = \frac{m}{M}\frac{5}{3}v = \frac{1}{3}v$

($M = 5m$).

3c).



* $F_N = F_z = Mg$ (verticaal evenwicht)

* $F_W = \mu F_N = \mu Mg$.

($1\frac{1}{2}$)

($\frac{1}{2}$ punt per kracht).

(1) 3d). Translatiebeweging: $M\ddot{x} = -\mu Mg \Rightarrow \ddot{x} = -\mu g$

(1) Rotatiebeweging (t.o.v. middelpunt): $I\dot{\omega} = F_w a = \mu Mga$

(1) 3e) Uit d) $\dot{x} = -\mu gt + \dot{x}(t=0) = u - \mu gt$

(1) $\dot{\omega} = \frac{\mu Mga}{I} = \frac{\mu Mga}{M\frac{2}{5}a^2} \Rightarrow \omega = \frac{5\mu gt}{2a}$

($\omega(t=0)=0$)

($\frac{1}{2}$) 3f). Slipvrije rol: $\dot{x} = \omega a$

(1) $\Rightarrow u - \mu gt = \frac{5}{2}\mu gt \Rightarrow u = \frac{7}{2}\mu gt \Rightarrow t = \frac{2}{7}\frac{u}{\mu g}$

of: $t = \frac{2}{21}\frac{v}{\mu g}$

beide OK.